Binom Teoremi

Her a , b reel sayısı ve her n doğal sayısı için

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

dir.

İspat: İspatı tümevarım yöntemi ile yapacağız.

Önce n=1 için eşitliğin doğru olduğunu gösteriniz.

$(a+b)^1 = a+b$ ve $\binom{1}{0} = 1$, $\binom{1}{1} = 1$ olduğundan, $\binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b = 1.a + 1.b = a+b$

olacağından eşitlik n=1 için sağlanır.

Şimdi de n=m için eşitliğin doğruluğunun n=m+1 için doğruluğunu gerektirdiğini ispat edelim. Eşitliğin n=m için doğru olduğunu kabul edelim. Bu takdirde

$$(a+b)^m = \binom{m}{0}a^m + \binom{m}{1}a^{m-1}b + \binom{m}{2}a^{m-2}b^2 + \ldots + \binom{m}{m-1}ab^{m-1} + \binom{m}{m}b^m$$ dir.

$$\binom{m}{0} = \binom{m+1}{0} = \binom{m}{m} = \binom{m+1}{m+1} = 1,$$

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} = \binom{m+1}{k+1}$$ eşitlikleri bilinmektedir

Bu eşitliğin her iki tarafını $(a+b)$ ile çarparak başlayabilirsiniz.

$$(a+b)^m(a+b) = (a+b)[\binom{m}{0}a^m + \binom{m}{1}a^{m-1}b + \binom{m}{2}a^{m-2}b^2 + \ldots + \binom{m}{m-1}ab^{m-1} + \binom{m}{m}b^m]$$

$$(a+b)^{m+1} = \binom{m}{0}a^{m+1} + \binom{m}{1}a^m b + \binom{m}{2}a^{m-1}b^2 + \ldots + \binom{m}{m-1}a^2b^{m-1} + \binom{m}{m}ab^m +$$

$$+ \binom{m}{0}a^m b + \binom{m}{1}a^{m-1}b^2 + \binom{m}{2}a^{m-2}b^3 + \ldots + \binom{m}{m-2}a^2b^{m-1} + \binom{m}{m-1}ab^m + \binom{m}{m}b^{m+1}$$

Bulunur. Ortak çarpanlarına ayırırsak;

$$(a+b)^{m+1} = \binom{m}{0}a^{m+1} + \binom{m+1}{1}a^m b + \binom{m+1}{2}a^{m-1}b^2 + \ldots + \binom{m+1}{m-1}a^2b^{m-1} + \binom{m+1}{m}ab^m + \binom{m}{m}b^{m+1}$$

elde edilir. Böylece tümevarım prensibinden dolayı her n doğal sayısı için Binom formülünün doğru olduğu ispat edilmiş oldu.